Analyse Mathématiques I

Première Année
Filière Sciences Economiques et Gestion

Chapitre I

Ensemble de nombres réels

Table des matières

1. Ensemble de nombres réels et fonctions

Le but de cette section est de rappeler quelques ensembles classiques, en particulier l'ensemble de nombres réels $\mathbb{R}$. De plus nous allons donner les propriétèes necessaires pour $\mathbb{R}$.

1.1. Quelques ensembles classiques

Définition 1.1. Un ensemble est un paquet de choses non rangées, sans répétion possible.

Prof. Said Hadd, Université Ibn Zohr.

On rappel que $\mathbb{N}$ est l'ensemble des *nombres naturels* (entiers naturels) positifs

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\},$$

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des *entiers relatifs*,

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}.$$

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. On note aussi

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$$

l'ensemble des *nombres rationnels*. On a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Soit maintenant l'equation $x^2 = 2$ où $x \in \mathbb{Q}$. Cette équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Q}$. Donc cet ensemble est assez petit pour résoudre les éequations algèbriques. Heuresement, il existe un ensemble plus grand dans lequel ce genre d'équations admettent des solutions (ici les solutions sont $x = \pm\sqrt{2}$). Cet ensemble est appelée ensemble de nombres réels et se note $\mathbb{R}$. On a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Définition 1.2. (Partie entière) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $n_x \leq x < n_x + 1$

$$n_x \leq x < n_x + 1.$$

Ce nombre naturel n_x est appel la *partie entière* de x, et parfois se note $n_x = E(x)$ ou $n_x = [x]$. (la notation n_x juste pour dire que le nombre naturel n depond de x).

Définition 1.3. (Puissance d'un réel) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit

1. $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{\text{n fois}}$.
2. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ si $x \neq 0$.
3. $x^0 = 1$.

1.2. Ordre sur $\mathbb{R}$ et intervalles

On peut ranger $\mathbb{R}$ avec un order "inférieur ou égale" noté " $\leq$ ". Et donc si $x, y, z \in \mathbb{R}$, alors on a soit $x = y$, soit $x < y$ soit $y < x$. Ici la notation " $<$ " veux dire "inférieur mais pas égale". De même on peut définir l'order "supérieur ou égale". De plus on a

- $x \leq y$ équivalent a $x + z \leq y + z$,
- $x \leq y$ et $0 < z$ équivalent a $xz \leq yz$
- $x \leq y$ et $z < 0$ équivalent a $yz \leq xz$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. On définit :

$$\begin{aligned}
]a,b[&= \big\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\big\} \quad \text{intervalle ouvert,}\\
[a,b] &= \big\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\big\} \quad \text{intervalle fermer,}\\
]a,b] &= \big\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\big\} \quad \text{intervalle semi–ouvert à gauche,}\\
[a,b[&= \big\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\big\} \quad \text{intervalle semi–ouvert à droit,}\\
[a,+\infty[&= \big\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\big\},\\
]a,+\infty[&= \big\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\big\},\\
]-\infty,a] &= \big\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\big\},\\
]-\infty,a[&= \big\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\big\},\\
\mathbb{R}^+ &= [0,+\infty[,\\
\mathbb{R}^- &=]-\infty,0],\\
\mathbb{R} &=]-\infty,+\infty[,\\
\mathbb{R}^* &= \mathbb{R}\backslash\big\{0\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\big\}.
\end{aligned}$$

1.3. Valeur absolue

Définition 1.4. La valeur absolue d'un nombre $x \in \mathbb{R}$ est définie par :

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Autrement dit

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x \leq 0. \end{cases}$$

On a les relations suivantes :

- $|x| \geq 0$ et $|x| \geq -x$.
- $|x| \geq 0, \quad |-x| = |x|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.
- $|x| = 0$ équivalent a $x = 0$.
- $|x| \geq x$ et $|x| \geq -x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- $|xy| = |x|\,|y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, et donc $|x^n| = |x|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.5. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $M \geq 0$ on a :*

1. $|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M \iff x \in [-M, -M]$.
2. $|x| < M \iff -M < x < M \iff x \in]-M, -M[$.
3. $|x| \geq M \iff x \leq -M \text{ ou } x \geq M \iff x \in]-\infty, M] \cup [M, +\infty[$.
4. $|x| > M \iff x < -M \text{ ou } x > M \iff x \in]-\infty, M[\cup]M, +\infty[$.

Remarque 1.6. Soit $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}
]a-\varepsilon, a+\varepsilon[&= \big\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\big\},\\
[a-\varepsilon, a+\varepsilon] &= \big\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \leq \varepsilon\big\}.
\end{aligned}$$

La partie $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ est applée *intervalle ouvert de centre a et de rayon $\varepsilon > 0$*

Démonstration. : En utilisant la proposition 1.5 on a $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ si et seulement si $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$ si et seulement si $-\varepsilon < x-a < \varepsilon$ si et seulement si $|x-a| < \varepsilon$. □

Proposition 1.7. (Inégalité triangulaire) *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$ *on a :*

1. $|x+y| \leq |x| + |y|$,
2. $|x-y| \leq |x| + |y|$,
3. $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

Démonstration. : (1) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On sait que $x \leq |x|$ et $y \leq |y|$. Donc $x+y \leq |x|+|y|$. D'autre part on a aussi $-|x| \leq x$ et $-|y| \leq y$. Donc $-(|x|+|y|) \leq x+y$. On a montrer alors que $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$, d'où $|x+y| \leq |x|+|y|$.
(2) On peut écrire $x-y = x+(-y)$. Donc $|x-y| = |x+(-y)| \leq |x| + |-y|$, d'aprés le point (1). Mais on a $|-y| = |y|$, d'où $|x-y| \leq |x|+|y|$.
(3) On peut écrire $x = (x-y)+y$, ce qui donne $|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y|+|y|$. Donc $|x| - |y| \leq |x-y|$. D'autre par on a $y = (y-x)+x$, ce qui donne $|y|-|x| \leq |x-y|$. Ce qui implique que $-|x-y| \leq |x|-|y|$. On a montrer alors $-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$. D'où $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$. □

1.4. Applications (ou fonctions)

Définition 1.8. Soit I une partie de $\mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$). Une application (ou fonction) f sur I est une manière d'associer à chaque élément $x \in I$ un élément $f(x) \in \mathbb{R}$. Cette application sera notée par $f : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$.

Exemple 1.9. (1) À chaque $x \in \mathbb{R}$ on prend son carré. On a alors définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto f(x) = x^2$.
(2) À chaque $x \in \mathbb{R}^*$ on prend son inverse $\frac{1}{x}$. Donc on a définit la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$.

Définition 1.10. (Composition) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$, $f : A \to B$ et $g : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On peut définir le composé de f et g par $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Exemple 1.11. (1) Soient $f :]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ et $g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \frac{x-1}{x+1}, \qquad x > 0.$$

La fonction $g \circ f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifie pour tout $x > 0$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{1-x}{1+x} = -\frac{x-1}{x+1}.$$

Donc

$$(g \circ f)(x) = -g(x), \qquad x > 0.$$

(2) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}+$ et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = (x+1)^2, \qquad g(x) = -\sqrt{x}, \qquad x \in \mathbb{R}^+.$$

La fonction $g \circ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\big((x+1)^2\big) = -\sqrt{(x+1)^2} = -|x+1|.$$

Définition 1.12. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. L'identité de A, noté id_A est l'application de A vers A qui envois tout élément de A sur lui même. Autrement écrit :

$$id_A : A \longrightarrow A, \qquad id_A(x) = x, \qquad \forall x \in A.$$

Remarque 1.13. Soit $f : A \to B$ une fonction. Pour tout $x \in A$, $(f \circ id_A)(x) = f\big(id_A(x)\big) = f(x)$. Donc $f \circ id_A = f$. De même $(id_B \circ f)(x) = id_B(f(x)) = f(x)$ pour tout $x \in A$. D'où $id_B \circ f = f$.

Définition 1.14. (Fonctions monotones) Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que :

1. f est croissante si pour tous $x, y \in I$ tels que $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$.
2. f est strictement croissante si pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$ alors $f(x) < f(y)$.
3. f est décroissante si pour tous $x, y \in I$ tels que $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$.
4. f est strictement décroissante si pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

Exemple 1.15. (1) Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors f est décroissante. En effet, soient $x, y \in]0, +\infty[$ tel que $x \leq y$. On a $f(x) - f(y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} \geq 0$, donc $f(x) \geq f(y)$.
(2) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$. Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$ tels que $x \leq y$. On a $f(x) - f(y) = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. Or $x - y \leq 0$ et $x + y \geq 0$, donc $(x-y)(x+y) \leq 0$. Ce qui implique $f(x) \leq f(y)$. Donc f est croissante.

Définition 1.16. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \to B$ une fonction. On dit que

1. f est **injective** si pour tous $x, y \in A$ tels que $x \neq y$ alors on a $f(x) \neq f(y)$. Autrement dit si pour tout $x, y \in A$ tels que $f(x) = f(y)$ alors $x = y$.
2. f est **surjective** si pour tout $y \in B$ il existe au moins $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
3. f est **bijective** si pour tout $y \in B$ il existe un et un seule $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit f est bijective si et seulement si f est à la fois injective et surjective.

Exemple 1.17. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $f(n) = \frac{1}{1+n}$. Soient $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Donc $\frac{1}{1+n} = \frac{1}{1+n'}$, ce qui implique que $1 + n = 1 + n'$, aussi $n = n'$. D'où f est injective. Montrons que f n'est pas surjective. Par l'absurde on suppose que f est surjective. Puisque $2 \in \mathbb{R}$ alors par définition

de la surjecivité il existe au moins $n \in \mathbb{N}$ tel que $2 = f(n) = \frac{1}{1+n}$. On tire $n = -\frac{1}{2}$. C'est absurde car $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. D'où f n'est pas surjective, et donc n'est pas bijective non plus.
(2) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 1$ n'est pas surjective. En effet, si f est supposée surjective, alors pour $y = -2 \in \mathbb{R}$ il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -2$, ce qui implique $x^2 - 1 = -2$, d'où l'élément $x \in \mathbb{R}$ vérifie $x^2 = -1$, c'est absurde, car cette équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.18. On appelle bijection réciproque d'une bijection f et on note f^{-1} la fonction caractérisée par

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

Il est clair que f^{-1} est aussi une bijection.

Exercice : Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{1\}$ définie par

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

est bijective et déterminer f^{-1}.

Solution : Dans un premier temps il faut vérifier que f est bien définie. En effet, si $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ alors $x \neq 2$. Par suit, le terme $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ est un réel bien défini. Il reste à voir que $f(x) \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, c'est à dire il faut voir que $f(x) \neq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$. Supposons le contraire, $f(x) = 1$, donc $\frac{x-1}{x-2} = 1$, ce qui implique $x - 1 = x - 2$, donc $1 = 2$, absurde. D'où $f(x) \neq 1$.
Montrons maintenant que f est bijective. Pour cela, soit $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Il faut montrer que l'équation

$$y = f(x), \qquad x \neq 2$$

admet une solution unique x. Cette équation s'écrit pour $x \neq 2$

$$\frac{x-1}{x-2} = y \iff (x-1) = y(x-2) \iff x - yx = 1 - 2y \iff x = \frac{1-2y}{1-y}.$$

Il reste a voir que $x \neq 2$. Sinon on aura $2 = \frac{1-2y}{1-y}$, et donc $2 - 2y = 1 - 2y$. Ceci donne $2 = 1$, absurde. Donc on a bien $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$. On a alors montrer que pour tout $y \neq 1$ l'équation $y = f(x)$ admet une seule solution $x = \frac{1-2y}{1-y}$. Donc f est bijective et $f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{2\}$ est donnée par

$$f^{-1}(y) = \frac{1-2y}{1-y}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

2. Suites de nombres réels

Dans cette partie nous allons introduire la notion de convergence de suites qui sera utile dans l'étude de limite et continuité de fonctions.

Définition 2.1. Une suite réelle est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. La suite $\{u(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ sera notée $(u_n)_n$.

Comme exemple $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$, et donc

$$(u_n)_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{99}, \cdots\right\}.$$

Définition 2.2. Une suite $(u_n)_n$ est dite convergente (ou converge) vers un réel ℓ si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|u_n - \ell| < \varepsilon, \ \text{ pour tout } n \geq N.$$

Dans ce cas on écrit $\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n$ ou parfois $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque 2.3. On a la relation suivante

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \iff u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \epsilon[.$$

Exemple 2.4. Soit la suite $u_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Montrons que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Tout d'abord, il faut noter que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > x$ (autrement dit on peut toujours trouver un entier naturel plus grand qu'un nombre réel, il faut penser à la partie entière, voir Définition 1.2).
Revenons maintenant a notre question. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$|u_n - 0| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Puisque $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}^+$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Alors pour tout $n \geq N$ on a $n > \frac{1}{\varepsilon}$ et donc $|u_n - 0| < \varepsilon$. Ceci implique que u_n tend vers zero quand n tend vers $+\infty$.

Définition 2.5. On dit qu'une suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > A$ pour tout $n \geq N$.

Exemple 2.6. Soit la suite $u_n = \log(n)$, $n \geq 1$. Montrons que $u_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Pour $A > 0$ et puisque la fonction exponentielle est strictement croissante on a

$$\log(n) > A \iff n = e^{\log(n)} > e^A.$$

Puisque $e^A \in \mathbb{R}^+$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > e^A$. Donc pour $n \geq N$ on a $n > e^A$ et donc $\log(n) > A$. Ce qui fallait démontrer.

Remarque 2.7. Ils existent des suites qui non pas de limites comme le montre l'exemple suivant : Soit la suite $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$. Donc $(u_n)_n = \{-1, 1\}$, d'où $|u_n| = 1$. Supposons par l'absurde que cette suite converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$ quand $n \to +\infty$. Donc pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \frac{1}{2}$ dés que $n \geq N$. D'autre part on a

$$u_n - u_{n+1} = (-1)^n - (-1)^{n+1} = (-1)^n(1 - (-1)) = 2(-1)^n.$$

Donc $|u_n - u_{n+1}| = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'inégalité triangulaire on a pour $n \geq N$,

$$\begin{aligned} 2 = |u_n - u_{n+1}| &= |(u_n - \ell) + (\ell - u_{n+1})| \\ &\leq |u_n - \ell| + |\ell - u_{n+1}| \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

D'où $2 < 1$, ce qui est absurde. Donc la suite $(-1)^n$ n'a pas de limite.

Définition 2.8. Une suite $(u_n)_n$ est dite divergente si elle tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$ ou s'elle n'admet pas de limite.

Exemple 2.9. Les suites $(\log(n))_n$ et $\big((-1)^n\big)_n$ sont divergentes, puisque $\log(n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ et que la suite $\big((-1)^n\big)_n$ n'a pas de limite.

Théorème 2.10. *(Unicité de la limite) Si une suite est convergente alors elle converge vers une seule limite.*

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $u_n \to \ell$ et $u_n \to \ell'$ quand $n \to +\infty$. Nous allons montrer que $\ell = \ell'$, il suffit donc de montrer que $|\ell - \ell'| = 0$. Supposons le contraire, c'est à dire $|\ell - \ell'| \neq 0$, et donc $|\ell - \ell'| > 0$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\ell - \ell'| = |(\ell - u_n) + (u_n - \ell')| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'|. \qquad (\star)$$

Soit $\varepsilon > 0$, donc ils existent $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{aligned} n \geq N_1 &\Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon \\ n \geq N_2 &\Longrightarrow |u_n - \ell'| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit maintenant $N = \max\{N_1, N_2\}$. Alors

$$n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_n - \ell'| < \varepsilon.$$

Donc d'après la relation $(\star)$, on a pour $n \geq N$

$$|\ell - \ell'| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0. \qquad (\star\star)$$

Puisque le $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a donc le droit de faire le choix $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{4}$. Maintenant en remplace ε dans $(\star\star)$ par sa valeur, on trouve $|\ell - \ell'| \leq 2\frac{|\ell - \ell'|}{4} = \frac{|\ell - \ell'|}{2}$. D'où $|\ell - \ell'| \leq 0$, c'est absurde. Donc $|\ell - \ell'| = 0$. □

Remarque 2.11. Soient $(u_n)_n$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$ et soit la suite valeur absolue $(|u_n|)_n$ Alors on a l'implication suivante

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \Longrightarrow |u_n| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} |\ell|. \qquad (\clubsuit)$$

En effet, d'après l'inégalité triangulaire on a

$$\Big||u_n| - |\ell|\Big| \leq |u_n - \ell|, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Ce qui implique que $\big||u_n| - |\ell|\big| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. D'où $|u_n|$ tend vers $|\ell|$ quand $n \to +\infty$.

Il faut bien faire attention car l'implication (♣) n'est pas vraie en générale dans le sens contraire. En effet la suite $u_n = (-1)^n$ est divergente et portant la suite valeur absolue $|u_n| = 1 \to 1$ quand $n \to +\infty$.
Mais si $\ell = 0$ alors on a l'équivalance

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff |u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci résult du fait que $\big||u_n|\big| = |u_n|$.
D'autre part, soit $(v_n)_n$ une autre suite telle que

$$|u_n| \leq v_n, \qquad \forall\, n.$$

Si $v_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, alors $|u_n| \to 0$ quand $n \to +\infty$. Ainsi $(u_n)_n$ converge vers zero.
Donc pour montrer qu'une suite tend vers zero, il faut juste montrer que sa valeur absolue tend vers zero. Par exemple lorsque la suite contient des terms compliquer comme cosinus, sinus, $(-1)^n$, $e^{-f(n)}$ avec $f(n) \geq 0$, etc....
- La suite $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ tend vers 0, car $|u_n| = \frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$.
- La suite $u_n = \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ tend vers 0, car $|u_n| \leq \frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$, puisque $|\sin(\sqrt{n})| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$.
-La suite $u_n = -\frac{e^{-\cos(\frac{\pi}{2n})}}{\sqrt{n}}$ converge vers 0. En effet, pour $n \geq 1$ on a $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, ainsi $0 < \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2}$. Ce qui implique que $\cos(\frac{\pi}{2n}) \geq 0$ et donc $0 < e^{-\cos(\frac{\pi}{2n})} \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. Maintenant

$$|u_n| = \frac{e^{-\cos(\frac{\pi}{2n})}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0, \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

Définition 2.12. Une suite $(u_n)_n$ est dite

1. majorée s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq \alpha$ pour tout n.
2. minorée s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\beta \leq u_n$ pour tout n.
3. bornée s'ils existent $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\beta \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n.

Remarque 2.13. Dans la pratique pour montrer qu'une suite est bornée il suffit d'utiliser le résultat suivant :

$$(u_n)_n \text{ est bornée} \iff \exists\, M \geq 0 \text{ tel que } |u_n| \leq M,\ \forall n.$$

En effet, si pour tout n on a $|u_n| \leq M$, alors $-M \leq u_n \leq M$ pour tout n. Donc $(u_n)_n$ est bornée. Inversement, supposons que $(u_n)_n$ est bornée, donc ils existent $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\beta \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n. D'autre part, on pose $M = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$, alors on a $|\alpha| \leq M$ et $-M \leq -|\beta|$. D'où $-M \leq -|\beta| \leq \beta \leq u_n \leq \alpha \leq |\alpha| \leq M$, donc $-M \leq u_n \leq M$. Ainsi $|u_n| \leq M$ pour tout n.

Théorème 2.14. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Supposons que $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. En particulier $|u_n| \to |\ell|$ quand $n \to +\infty$. Alors pour $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\big||u_n| - |\ell|\big| < 1$ pour tout $n \geq N$. En particulier

$$|u_n| \leq 1 + |\ell|, \quad \forall\, n \geq N.$$

Donc ceci montre que (u_n) est bornée par $M_1 = 1+|\ell|$ pour les indices $n \geq N$, c'est à dire

$$|u_n| \leq M_1, \quad \forall\, n \in \{N, N+1, N+2, \cdots\}.$$

Il rest a voir les terms $u_0, u_1, \cdots, u_{N-1}$. Puisque ils sont de nombre fini, en prend alors $M_0 = \max\{|u_0|, |u_1|, |u_2|, \cdots, |u_{N-1}|\}$. Donc

$$|u_n| \leq M_0, \quad \forall\, n \in \{0, 1, 2, \cdots, N-1\}.$$

On pose maintenant $M = \max\{M_0, M_1\}$. Alors on a

$$|u_n| \leq M, \quad \forall\, n \in \{0, 1, 2, \cdots, N-1, N, N+1, N+2, \cdots\} = \mathbb{N}.$$

Donc $(u_n)_n$ est bornée. □

Remarque 2.15. Il faut noter qu'il esixte des suites qui sont bornées mais divergentes. Par exemple la suite $u_n = (-1)^n$ est bornée car $|u_n| = 1$ pour tout n. Portant cette suite est divergente.

Proposition 2.16. *(opérartions sur les suites) : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes vers ℓ et ℓ', respectivement et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

1. *la suite $(u_n + v_n)_n$ converge vers $\ell + \ell'$,*
2. *la suite $(\lambda u_n)_n$ converge vers $\lambda\ell$,*
3. *la suite $(u_n v_n)_n$ converge vers $\ell\ell'$,*
4. *si de plus $v_n \neq 0$ pour tout n et $\ell' \neq 0$ alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.*

Exemple 2.17. Soit la suite

$$w_n = \frac{2n^2 + 5n + 1}{3n^2 + 1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

On a

$$w_n = \frac{n^2\left(2 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2}}.$$

La suite $u_n = 2 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}$ converge vers 2, et la suite $v_n = 3 + \frac{1}{n^2}$ converge vers 3. Ainsi la suite $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ converge vers $\frac{2}{3}$.

Définition 2.18. Une suite $(u_n)_n$ est dite :

1. croissante si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n.
2. décroissante si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout n

Le résultat suivant est trés utile pour montrer qu'une suite est convergente.

Théorème 2.19. *On a les assertions suivantes :*

1. *Toute suite croissante majorée est convergente.*
2. *Toute suite décroissante minorée est convergente.*

Exemple 2.20. (trés classique) **(1)-** Soit $a \in]-1,1[$ (donc $|a| < 1$). On considère la suite géometrique $u_n = a^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrons que cette suite converge vers zero. Il suffit donc de montrer que la suite $(|u_n|)_n$ converge vers zero. La suite $(|u_n|)_n$ est minorée par zero, car $|u_n| \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc pour que $(|u_n|)_n$ soit convergente il suffit qu'elle soit décroissante. On a

$$|u_{n+1}| - |u_n| = |a^{n+1}| - |a^n| = |a|^{n+1} - |a|^n = |a|^n(|a| - 1) \leq 0,$$

car $|a| < 1$ et $|a|^n \geq 0$. Donc la suite est décroissante, donc convergente. Soit alors ℓ sa limite. On sait que $|u_n| \to \ell$ implique que $|u_{n+1}| \to \ell$. D'autre part $|u_{n+1}| = |a^{n+1}| = |a|\,|a^n| = |a||u_n| \to |a|\ell$ quand $n \to +\infty$. Par unicité de la limite on a $\ell = |a|\ell$ (car on a vue que $|u_{n+1}|$ a deux limites ℓ et $|a|\ell$). D'où $\ell(1 - |a|) = 0$, ainsi $\ell = 0$ puisque $|a| \neq 1$.
(2)- Soit la suite

$$u_n = \frac{\sin(\frac{1}{n})}{2^n}, \qquad n \geq 1.$$

Puisque $|\sin(\frac{1}{n})| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$ alors

$$|u_n| \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or $a = \frac{1}{2} \in]0,1[$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Ainsi $|u_n| \to 0$ quand $n \to +\infty$, et donc $(u_n)_n$ converge vers zero.
(3)- Soit $q \in]-1,1[$ et soit la suite

$$u_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Cherchons une expression simple de u_n. On a

$$\begin{aligned}(1-q)u_n &= u_n - qu_n \\ &= (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) - q(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) \\ &= (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}) \\ &= 1 - q^{n+1}.\end{aligned}$$

Puisque $q \neq 1$ alors

$$u_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \qquad n \geq 0.$$

D'autre part, comme $q \in]-1,1[$ alors $q^{n+1} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc $1 - q^{n+1} \to 1$ quand $n \to +\infty$. Finallement, on trouve

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) = \frac{1}{1-q}, \qquad \forall\, q \in]-1,1[.$$

Le résultat suivant est le plus important dans la pratique pour calculer les limites de suites.

Théorème 2.21. *(Principe des gendarmes) Soient* $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ *et* $(w_n)_n$ *trois suites telles que*

$$v_n \leq u_n \leq w_n, \qquad \forall n.$$

Si $v_n \to \ell$ *et* $w_n \to \ell$ *quand* $n \to +\infty$, *alors* $u_n \to \ell$ *quand* $n \to +\infty$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence des suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ vers la même limite ℓ, ils existent $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$n \geq N_1 \Longrightarrow \ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon$$
$$n \geq N_2 \Longrightarrow \ell - \varepsilon < w_n < \ell + \varepsilon.$$

Si on pose $N = \max\{N_1, N_2\}$ alors en particulier on a

$$n \geq N \Longrightarrow \ell - \varepsilon < v_n \leq u_n \leq w_n < \ell + \varepsilon.$$

Donc

$$n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Ainsi la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ. □

Exemple 2.22. **(1)-** Soit la suite

$$u_n = \frac{1 + e^{-\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}{\sqrt{n}}$$

Pour $n \geq 1$ on a $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, donc $0 < \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2}$. Ainsi $\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \geq 0$ et $0 < e^{-\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \leq 1$. Ceci implique que

$$0 < u_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

la suite $(0)_n$ tend vers 0 et $\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)_n$ tend aussi vers 0 quand $n \to +\infty$. Par le principe des gendarmes on a $(u_n)_n$ converge vers 0.
(2)- Soit la suite $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ pour $n \geq 1$. Puisque la fonction racine carré $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissant alors $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$. Donc

$$\begin{aligned} 0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Mais pour $n \geq 1$ on a $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq \sqrt{n}$ donc $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ainsi

$$0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ce qui implique que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$, par le principe des gendarmes.

Analyse Mathématiques I

Première Année
Filière Sciences Economiques et Gestion

Chapitre II

Fonctions d'une variable réelle

Table des matières

Prof. Said Hadd, Université Ibn Zohr.

1. Limites de fonctions

Le but de cette section est de donner les diffèrentes défintions de limites ainsi que des crétères simples et pratiques pour calculer les limites de fonction.

1.1. Operations sur les fonctions

Soient D une parites de $\mathbb{R}$ et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On définit

- la domme de f et g par $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$ pour tout $t \in D$,
- le produit de f et g par $(fg)(t) = f(t)g(t)$ pour tout $t \in D$,
- si de plus g est non identiquement nulle sur D, alors le quotion de f et g est donné par $\left(\frac{f}{g}\right)(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$ pour tout $t \in D$,
- $f \geq g$ signifie $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in D$.

1.2. Voisinages et points adhérents

Définition 1.1. Un *voisinage fondamental* d'un nombre $a \in \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert de la forme $]a-\eta, a+\eta[$ pour un certain $\eta > 0$.

Remarquant que

$$]a-\eta, a+\eta[= \{t \in \mathbb{R} : |t-a| < \eta\}.$$

Donc l'ensemble

$$V_\eta(a) = \{t \in \mathbb{R} : |t-a| < \eta\}$$

est un voisinage fondamental de a.

Définition 1.2. Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dit *voisinage* d'un nombre $a \in \mathbb{R}$ s'il existe $\eta > 0$ tel que $V_\eta(a) \subset I$. Autrement dit si I contient un voisinage fondamental de a.

Exemple 1.3. Soit $a = 1$. Alors $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ est un voisinage fondamental de 1 (car on a choisi $\eta = \frac{1}{2}$, donc $]a-\eta, a+\eta[=]1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}[=]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$). Maintenant soit $I = [0, +\infty[$ donc I est un voisinage de 1 puisque le voisinge fondamental $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\subset I$.

Maintenant nous allons introduire le concept de points adhérents à un ensemble trés importante pour définir les limites de fonctions. Pour sela on rappel que si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ alors on dèfinit leurs intersection par

$$A \cap B = \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } t \in A \text{ et } t \in B\}.$$

On dit que A est non vide et on écrit $A \neq \emptyset$ s'il existe au moin un élément $t \in A$.
On dit que A rencontre B si $A \cap B \neq \emptyset$.

Définition 1.4. Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est un *point adhérent à* D lorsque D rencontre tout voisinage de a. Autrement dit, pour tout $\eta > 0$ on a $]a-\eta, a+\eta[\cap D \neq \emptyset$.
Donc un point a est adhérent à D s'ils existent des points de D qui sont arbitrairement proches de a. Autrement dit si pour tout $\eta > 0$ (petit que soit il) il existe $x \in D$ tel que $|x-a| < \eta$.

Remarque 1.5. **(1)** Lorsqu'on parle de point adhérent a, alors le point a n'est pas forcément supposé appartenir à D. Mais si $a \in D$ alors il est point adhérent à D. Par exemple si on prend $D =]0, +\infty[$ alors tout élément $a \in D$ est un point adhérent car pour tout $\eta > 0$ on a

$$]a - \eta, a + \eta[\cap]0, +\infty[= \begin{cases}]a - \eta, a + \eta[, & \text{si } a \geq \eta, \\ ]0, a + \eta[, & \text{si } a < \eta. \end{cases}$$

Dans tous les cas on a $]a - \eta, a + \eta[\cap]0, +\infty[\neq \emptyset$ pour tout $\eta > 0$.
Observons que $0 \notin]0, +\infty[$, portant 0 est un point adhérent car pour tout $\eta > 0$ on a $] - \eta, \eta[$ est un voisinage de 0 et $] - \eta, \eta[\cap]0, +\infty[=]0, \eta[\neq \emptyset$.
Le point $a = -1$ n'est pas un point adhérent à $]0, +\infty[$ car si on prend $\eta = \frac{1}{2}$ alors $] - 1 - \eta, -1 + \eta[=] - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$ est un voisinage de -1 mais

$$] - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[\cap]0, +\infty[= \emptyset.$$

(2) Nous allons maintenant dire pourquoi cette notion de points adhérents est importante. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(t) = \frac{1+\sqrt{t}}{t}$ pour $t > 0$. On remarque que $f(t)$ n'est définie pour $t = -1$ ($_1$ n'est pas un point adhérent à $]0, +\infty[$), de plus il existe un voisinage $V_\eta(-1)$ de -1 tel que $f(t)$ n'est pas définie pour $t \in V_\eta(-1)$ (il suffit de prendre $\eta = \frac{1}{2}$ et donc $V_\eta(-1) =] - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$). Donc $f(t)$ n'est pas définie non seulement au point $t = -1$, mais aussi n'est pas définie sur un voisinage de -1.
Le point 0 est un point adhérent à $]0, +\infty[$ et $f(t)$ n'est pas définie pour $t = 0$. Mais $f(t)$ est bien défnie sur tout voisignage $V_\eta(0) =] - \eta, \eta[$ de 0 car $f(t)$ est bien définie pour $t \in]0, \eta[\subset V_\eta(0)$.

1.3. Définitions de limites de fonctions

Dans toute la suite si $f : D_f \to \mathbb{R}$ est une fonction et $a \in \mathbb{R}$, lorsqu'on dit " t tend vers a" c'est sous entendu que a est déja un point adhérent à D_f. La phrase " t tend vers a" signifie que " t est très proche de a" ou bien la distance entre t et a qui est d'ailleur $|t - a|$ est très petite. Dire que $|t - a|$ est très petite c'est à dire qu'il existe $\eta > 0$ très petit tel que $|t - a| < \eta$.
D'autre part, si $a, \ell \in \mathbb{R}$ alors on note par $V_\eta(a) =]a - \eta, a + \eta[$ un voisinage de a et par $V_\varepsilon(\ell) =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ un voisinage de ℓ pour $\eta > 0$ et $\varepsilon > 0$.

Définition 1.6. Soeint $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $a, \ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f(t)$ tend vers ℓ quand t tend vers a si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$t \in D_f \cap V_\eta(a) \implies f(t) \in V_\varepsilon(\ell).$$

Autrement dit, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour $t \in D_f$ on a

$$t \in]a - \eta, a + \eta[\implies f(t) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[,$$

qui peut aussi s'écrire

$$|t - a| < \eta \implies |f(t) - \ell| < \varepsilon.$$

Dans ce cas on écrit

$$\ell = \lim_{t \to a} f(t) \quad \text{ou} \quad f(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Exemple 1.7. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = 2t \sin\left(\frac{1}{t}\right), \qquad t \neq 0.$$

En utilisant la définition, montrons que $0 = \lim_{t \to 0} f(t)$. En effet, pour $t \in \mathbb{R}^*$ on a

$$|f(t) - 0| = 2|t| \left| \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right| \leq 2|t| = 2|t - 0|.$$

(Ici on a utilisé le fait que $|\sin(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Donc pour $\varepsilon > 0$ on a

$$2|t - 0| < \varepsilon \implies |f(t) - 0| < \varepsilon,$$

qui s'écrit

$$|t - 0| < \frac{\varepsilon}{2} \implies |f(t) - 0| < \varepsilon.$$

Il suffit de choisir $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$, et donc

$$|t - 0| < \eta \implies |f(t) - 0| < \varepsilon.$$

D'où $f(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0.

Nous allons maintenant parler de limites de fonctions lorsque t tends vers $\pm\infty$ (autrement dit lorsque t est proche de $\pm\infty$). Si $f : D_f \to \mathbb{R}$, alors si on veux parler de la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$ il faut que les éléments t qui sont proches de $+\infty$ soient auusi dans D_f (autrement dit t est proche de $+\infty$ et en même temps $t \in D_f$). Donc il faut supposer que tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ rencontre D_f (autrement dit $]A, +\infty[\cap D_f \neq \emptyset$). Dans ce cas, on dit que D_f est *non majoré*. De même lorsque t est proche de $-\infty$, il faut que $]-\infty, A[\cap D_f \neq \emptyset$. Dans ce cas, on dit que D_f est *non minoré*. Par exemple si $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, on a le doit de parler de la limite de $f(t)$ lorsque t est proche de $+\infty$, mais on a pas le doit de parler de la limite lorsque $t \to -\infty$. Si $f : [-5, 8] \to \mathbb{R}$ on a pas le droit de parler de limite lorsque $t \to +\infty$ et $t \to -\infty$.

Dans ce qui suit, on suppose que D_f est non majoré si on parle de limite en $+\infty$, et que D_f est non minoré si on parle de limite en $-\infty$.

Définition 1.8. Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f(t)$ tend vers ℓ quand t tend vers $+\infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in D_f$,

$$t > A \implies |f(t) - \ell| < \varepsilon.$$

Dans ce cas on écrit

$$\ell = \lim_{t \to +\infty} f(t).$$

Exemple 1.9. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \frac{1 + \sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}}, \qquad t > 0.$$

Montrons que $f(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. En effet, soit $\varepsilon > 0$ quelconque. En utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que $\left|\sin(\frac{1}{t})\right| \leq 1$, on obtient

$$|f(t) - 0| = |f(t)| = \frac{|1 + \sin(\frac{1}{t})|}{\sqrt{t}} \leq \frac{1 + |\sin(\frac{1}{t})|}{\sqrt{t}} \leq \frac{2}{\sqrt{t}}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} |f(t) - 0| < \varepsilon \quad & \text{dés que} \quad \frac{2}{\sqrt{t}} < \varepsilon \\ & \text{dés que} \quad \sqrt{t} > \frac{2}{\varepsilon} \\ & \text{dés que} \quad t > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Maintenant si on choisi $A = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$, alors on a

$$t > A \implies |f(t) - 0| < \varepsilon.$$

Donc $f(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Définition 1.10. Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f(t)$ tend vers ℓ quand t tend vers $-\infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in D_f$,

$$t < A \implies |f(t) - \ell| < \varepsilon.$$

Dans ce cas on écrit

$$\ell = \lim_{t \to -\infty} f(t).$$

Exemple 1.11. Soit $f :] - \infty, 0[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \frac{2t + \sin(t)}{t}, \qquad t < 0.$$

Montrons que $f(t)$ tend vers 2 quand t tend vers $-\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On remarque que $f(t) = 2 + \frac{\sin(t)}{t}$ pour tout $t < 0$. Donc pour $t < 0$ on a $|t| = -t$ et donc

$$|f(t) - 2| = \frac{|\sin(t)|}{|t|} \leq \frac{1}{|t|} = \frac{1}{-t}.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} |f(t)-2|<\varepsilon \quad &\text{dés que} \quad \frac{1}{-t}<\varepsilon \\ &\text{dés que} \quad \frac{1}{t}>-\varepsilon \\ &\text{dés que} \quad t<-\frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Si on choisi $A=-\frac{1}{\varepsilon}$ alors on a

$$t<A \implies |f(t)-2|<\varepsilon.$$

D'où $f(t)$ tend vers 2 quand t tend vers $-\infty$.

Théorème 1.12. *Si une fonction f admet une limite alors cette limite est unique.*

Démonstration. Soit $f: D_f \to \mathbb{R}$ et supposons par l'absurde que $f(t)$ tend vers ℓ et ℓ' quand $t \to a$ avec $\ell \neq \ell'$. En particulier on a $|\ell-\ell'|>0$. Pour tout $t \in D_f$ on a

$$|\ell-\ell'| = |(\ell-f(t))+(f(t)-\ell')| \leq |f(t)-\ell|+|f(t)-\ell'|. \qquad (*)$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon>0$ ils existent $\alpha,\beta>$ tels que

$$\begin{aligned} |f(t)-\ell|<\varepsilon \quad &\text{dés que} \quad |t-a|<\alpha, \\ |f(t)-\ell'|<\varepsilon \quad &\text{dés que} \quad |t-a|<\beta. \end{aligned}$$

Soit maintenant $\gamma=\min\{\alpha,\beta\}$. Donc

$$|f(t)-\ell|<\varepsilon \quad \text{et} \quad |f(t)-\ell'|<\varepsilon \quad \text{dés que} \quad |t-a|<\gamma.$$

D'aprés $(*)$, pour $|t-a|<\gamma$ on a

$$|\ell-\ell'| \leq \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Comme on le droit de choisir ε comme on veux, donc on peut le prendre $\varepsilon=\frac{|\ell-\ell'|}{4}$. Donc

$$|\ell-\ell'| < 2\,\frac{|\ell-\ell'|}{4} = \frac{|\ell-\ell'|}{2}.$$

Donc $|\ell-\ell'|<0$. Absurde. Par suit, on a $\ell=\ell'$. Même raisonemment lorsque $a=\pm\infty$. □

1.4. Operations sur les limites

Dans cette partie et pour simplier les notations, nous supposons que toutes les fonctions sont définies sur la même partie $D \subset \mathbb{R}$. De plus on va supposer que $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$, autrement dit $a \in \mathbb{R}$ ou $a=+\infty$ ou $a=-\infty$.

Proposition 1.13. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tels que*

$$\ell = \lim_{t \to a} f(t) \quad \textit{et} \quad \ell' = \lim_{t \to a} f(t).$$

Alors

$$\ell + \ell' = \lim_{t \to a} \big(f(t) + g(t)\big) \quad \textit{et} \quad \ell\,\ell' = \lim_{t \to a} \big(f(t)g(t)\big).$$

Si de plus g est non nulle sur D et $\ell' \neq 0$, alors

$$\frac{\ell}{\ell'} = \lim_{t \to a} \frac{f(t)}{g(t)}.$$

Proposition 1.14. *Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions telle que $f(D_f) \subset D_g$. On suppose que*

$$b = \lim_{t \to a} f(t) \quad \textit{et} \quad \ell = \lim_{s \to b} g(s).$$

Alors

$$\ell = \lim_{t \to a} (g \circ f)(t).$$

Démonstration. Puisque $g(s)$ tend vers ℓ quand s tend vers b alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $s \in D_g$ on a

$$|s - b| < \beta \implies |g(s) - \ell| < \varepsilon.$$

D'autre part, puisque $f(t)$ tend vers b quand t tend vers a alors il existe $\eta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |t - a| < \beta &\implies |f(t) - b| < \beta \\ &\implies |g(f(t)) - \ell| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $g(f(t))$ tend vers ℓ quand t tend vers a. $\square$

Exemple 1.15. Soit la fonction $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \cos\big(\frac{\pi}{2} + t\sin(\frac{1}{t})\big)$. Cherchons la limite de h en $a = 0$. On peut écrire $h = g \circ f$ avec $g(t) = \cos(t)$ et $f(t) = \frac{\pi}{2} + t\sin(\frac{1}{t})$. D'autre part on a $f(t)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand $t \to 0$ et $g(s)$ tend vers 0 quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$. Donc $h(t) = g(f(t))$ tend vers 0 quand t tend vers 0.

Proposition 1.16. *(Principe des gendarmes) Soient $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ trois fonctions telles que $f(t) \leq h(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in D$. On suppose que*

$$\lim_{t \to a} f(t) = \lim_{t \to a} g(t) = \ell.$$

Alors

$$\lim_{t \to a} h(t) = \ell.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, ils existent $\alpha, \beta > 0$ tels que $|f(t)-\ell| < \varepsilon$ dés que $|t-a| < \alpha$ et $|g(t)-\ell| < \varepsilon$ dés que $|t-a| < \beta$. Soit maintenant $\eta = \min\{\alpha, \beta\}$, donc $\eta \leq \alpha$ et $\eta \leq \beta$ et donc pour $|t-a| < \eta$ on a $|t-a| < \alpha$ et $|t-a| < \beta$, donc

$$\ell - \varepsilon < f(t) < \ell + \varepsilon \quad \text{et} \quad \ell - \varepsilon < g(t) < \ell + \varepsilon.$$

Par suit, pour $|t-a| < \eta$ on a

$$\ell - \varepsilon < f(t) \leq h(t) \leq g(t) < \ell + \varepsilon.$$

Donc

$$|t-a| < \eta \implies |h(t) - \ell| < \varepsilon.$$

D'où $h(t)$ tend vers ℓ quand t tend vers a. □

Proposition 1.17. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ tel que $f \leq g$ sur D. On suppose que $\ell = \lim_{t\to a} f(t)$ et $\ell' = \lim_{t\to a} g(t)$. Alors*

$$\ell \leq \ell'.$$

Remarque 1.18. Les deux propositions en haut sont aussi valables lorsque t tend vers $+\infty$.

Exemple 1.19. **(1)** Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définit par $f(t) = t\cos(\frac{1}{t})$. Cherchons la limite de f en 0. Puisque $|\cos(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ on a

$$|f(t)| = |t| \left|\cos(\frac{1}{t})\right| \leq |t|.$$

Donc

$$-|t| \leq f(t) \leq |t|.$$

Puisque $\lim_{t\to 0}(|t|) = \lim_{t\to 0}(-|t|) = 0$ alors d'aprés le principe des gendarmes on a $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$.
(2)- Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{t + \sin(t^3)}{2t + \cos(\sqrt{t})}, \qquad t \geq 1.$$

La fonction f est bien définie sur $[1, +\infty[$ car pour $t \geq 1$ on a $2t \geq 2$ et $\cos(\sqrt{t}) \geq -1$, donc $2t + \cos(\sqrt{t}) \geq 2 - 1 = 1$, d'où $2t + \cos(\sqrt{t}) \neq 0$. Cherchons maintenant la limite de f en $+\infty$. On remarque que

$$f(t) = \frac{t\left(1 + \frac{\sin(t^3)}{t}\right)}{t\left(2 + \frac{\cos(\sqrt{t})}{t}\right)} = \frac{1 + \frac{\sin(t^3)}{t}}{2 + \frac{\cos(\sqrt{t})}{t}}$$

On sait que $-1 \leq \sin(t^3) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(\sqrt{t}) \leq 1$, et donc

$$-\frac{1}{t} \leq \frac{\sin(t^3)}{t} \leq \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{t} \leq \frac{\cos(\sqrt{t})}{t} \leq \frac{1}{t},$$

ce qui implique

$$1-\frac{1}{t}\leq 1+\frac{\sin(t^3)}{t}\leq 1+\frac{1}{t}\quad \text{et}\quad 2-\frac{1}{t}\leq 2+\frac{\cos(\sqrt{t})}{t}\leq 2+\frac{1}{t}.$$

Maintenant puisque $\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)=1$ alors d'après le principe des gendarmes on a

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{\sin(t^3)}{t}\right)=1.$$

De même on a

$$\lim_{t\to+\infty}\left(2+\frac{\cos(\sqrt{t})}{t}\right)=2.$$

Par suit

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=\frac{1}{2}.$$

1.5. Limites à droite et à gauche

On a vue que $\ell=\lim_{t\to a}f(t)$ signifie que lorsque t est proche de a alors $f(t)$ est proche de ℓ. La phrase t est proche de a signifie que t est proche à droite de a ou bien à gauche de a.

Parfois il arrive que $f(t)$ n'est pas définie si $t<a$, donc dans ce cas t est seulement peut être proche de a en coté droite. De même il arrive que $f(t)$ n'est pas définie pour $t>a$, donc dans ce cas t est seulement peut être proche de a en coté gauche.

Dans d'autres car la fonction f peut prendre la forme

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t), & t>a,\\ f_2(t), & t>a.\end{cases}$$

D'où la notion de limite à droite et limite à gauche.

Définition 1.20. Soient $f:D_f\to\mathbb{R}$ et $a,\ell\in\mathbb{R}$. Alors :

1. On dit que f admet une limite ℓ à gauche de a si pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\eta>0$ tel que pour tout $t\in D_f$,

$$a-\eta<t<a \implies |f(t)-\ell|<\varepsilon.$$

   Dans ce cas, on note

$$\ell=\lim_{\substack{t\to a\\ t<a}}f(t)\quad \text{ou}\quad \ell=\lim_{t\to a^-}f(t).$$

2. On dit que f admet une limite ℓ à droite de a si pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\eta>0$ tel que pour tout $t\in D_f$,

$$a<t<a+\eta \implies |f(t)-\ell|<\varepsilon.$$

   Dans ce cas, on note

$$\ell=\lim_{\substack{t\to a\\ t>a}}f(t)\quad \text{ou}\quad \ell=\lim_{t\to a^+}f(t).$$

Théorème 1.21. *Soit f une fonction dééfinie sur un voisinage de a (sauf peut être en a) et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\ell = \lim_{t\to a} f(t) \iff \ell = \lim_{t\to a^+} f(t) = \lim_{t\to a^-} f(t).$$

Exemple 1.22. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{t}\ \sin(\frac{1}{t}), & t > 0, \\ \log(1+t^2)\cos(t^2), & t < 0. \end{cases}$$

Calculons la limite de f en 0. Donc on doit comparer la limite à doite et à gauche de 0.
<u>Limite à doite de 0</u> : Dans ce cas on considère les $t > 0$, et donc $f(t) = \sqrt{t}\ \sin(\frac{1}{t})$. En utlisant le fait que $-1 \leq \sin(\frac{1}{t}) \leq 1$ on a $-\sqrt{t} \leq f(t) \leq \sqrt{t}$ pour tout $t > 0$. Le principe des gendarmes implique que $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0$.
<u>Limite à gauche de 0</u> : Dans ce cas on considère les $t < 0$, et donc $f(t) = \log(1+t^2)\cos(t^2)$. En utlisant le fait que $-1 \leq \cos(t^2) \leq 1$ et aussi $\log(1+t^2) > 0$ (car la fonction $\log(t)$ et strictement croissante et donc $1+t^2 > 1$ implique $\log(1+t^2) > \log(1) = 0$) on obtien $-\log(1+t^2) \leq f(t) \leq \log(1+t^2)$ pour tout $t < 0$. Le principe des gendarmes implique que $\lim_{t\to 0^-} f(t) = 0$.
<u>Limite en 0</u> : Puisque on a $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^-} f(t) = 0$ alors

$$\lim_{t\to 0} f(t) = 0.$$

Exemple 1.23. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t + \frac{|t|}{t}$ pour $t \in \mathbb{R}^*$. Cherchons la limite en 0. Il faut tout dabord remarquer que

$$f(t) = \begin{cases} t+1, & t > 0, \\ t-1, & t < 0. \end{cases}$$

Donc

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t) = \lim_{t\to 0}(t+1) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(t) = \lim_{t\to 0}(t-1) = -1.$$

Puisque

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) \neq \lim_{t\to 0^-} f(t),$$

alors f n'admet pas de limite en 0.

1.6. Suites et limites de fonctions

Proposition 1.24. *Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors $\ell = \lim_{t\to 0} f(t)$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_n$ de points de D_f tel que $a = \lim_{n\to+\infty} u_n$ on a $\ell = \lim_{n\to+\infty} f(u_n)$.*

Ce résultat est parfoit utile pour calculer les limites de suites.

Exemple 1.25. Soit la suite suivante

$$v_n = \sin\Big(\frac{\pi n^2+1}{2n^2+3}\Big), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

On peut écrire $v_n = f(u_n)$ avec

$$f(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad u_n = \frac{\pi n^2+1}{2n^2+3}.$$

Il est claire que

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} u_n \quad \text{et} \quad 1 = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} f(t).$$

Donc d'après la proposition on a $v_n = f(u_n) \to 1$ quand $n \to +\infty$.

Remarque 1.26. Pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en un point a il suffit de trouver une suite $(u_n)_n$ qui converge vers a mais la suite $(f(u_n))_n$ est divergente. Soit $f(t) = \cos(\frac{1}{t})$ pour $t > 0$. Montrons que cette fonction n'admet pas de limite quand t tend vers $a = 0$. Soit la suite $u_n = \frac{1}{n\pi}$. Donc $(u_n)_n$ converge vers $a = 0$, mais $f(u_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ est une suite divergenete (voir chapitre 1). Donc la fonction f n'admet pas de limite en 0.

2. Fonctions continues

2.1. Définitions et exemples

Définition 2.1. Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ une foncton et $a \in D_f$.

1. On dit que f est *continue en a* si
$$\lim_{\substack{t\to a\\ t\neq a}} f(t) = f(a).$$
2. On dit que f est *continue à droite en a* si
$$\lim_{t\to a^+} f(t) = f(a).$$
3. On dit que f est *continue à gauche en a* si
$$\lim_{t\to a^-} f(t) = f(a).$$

Exemple 2.2. **(1)-** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} t^2\cos(\frac{1}{t}), & t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Etudions la continuité de f en 0. Déjà on a $f(0) = 1$. D'autre part, pour $t \neq 0$ on a

$$|f(t)| = t^2\Big|\cos(\frac{1}{t})\Big| \leq t^2.$$

Donc d'après le principe des gendarmes on a

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} f(t) = 0 = f(0).$$

Donc f est continue en 0.

Le résultat suivant donne la relation entre le continuité et les continuités à droite et à gauche.

Théorème 2.3. *Une fonction f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.*

Exemple 2.4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{t}}{1+e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}}}, & t > 0, \\ t^2 \sin(\frac{1}{t}), & t < 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Etudions la continuité au point 0 (on note que $f(0) = 1$).
• Continuité à droite de 0 : pour $t > 0$ on a

$$0 < f(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}}} \leq \sqrt{t} \qquad (\text{car } 1+e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}} > 1).$$

Le principe des gendarmes implique que

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0 = f(0).$$

Donc f est continue à droite en 0.
• Continuité à gauche de 0 : pour $t < 0$ on a

$$-t^2 \leq f(t) = t^2 \sin(\frac{1}{t}) \leq t^2 \qquad (\text{car } -1 \leq \sin(\frac{1}{t}) \leq 1).$$

Le principe des gendarmes implique que

$$\lim_{t\to 0^-} f(t) = 0 = f(0).$$

Donc f est continue à gauche en 0.
• Continuité en 0 : puisque f est continue à droite et à gauche en 0, alors f est continue en 0.

Définition 2.5. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

1. $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est continue (ou continue sur $]a, b[$) si f est continue en chaque point $x_0 \in]a, b[$.
2. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue (ou continue sur $[a, b]$) si f est continue sur $]a, b[$, f continue à droite de f et f continue à gauche de f.

Exemple 2.6. Continuité de queleques fonctions de bases :

1. Fonction racine carrée : Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ f(t) = \sqrt{t}$. Alors f est continue sur $[0, +\infty[$. Montrons tout d'abord que f est continue à droite en 0. Soit donc $\varepsilon > 0$. On a $|f(t) - f(0)| = \sqrt{t}$. D'ou $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$ dés que $\sqrt{t} < \varepsilon$ dés que $0 < t < \varepsilon^2$. Donc si on pose $\eta = \varepsilon^2$ alors $0 < t < \eta$ implique $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$. Autrement dit $\lim_{t\to 0} f(t) = 0 = f(0)$, ainsi f est continue à droite en 0. Regardons maintenant la continuité de f sur $]0, +\infty[$. Montrons alors que f est continue en tout point $x_0 \in]0, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x_0)| &= |\sqrt{t} - \sqrt{x_0}| \\ &= \frac{|t - x_0|}{\sqrt{t} + \sqrt{x_0}} \\ &\leq \frac{|t - x_0|}{\sqrt{x_0}} \qquad (\text{car } \sqrt{t} + \sqrt{x_0} > \sqrt{x_0}). \end{aligned}$$

On $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ dés que $\frac{|t - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon$ dés que $|t - x_0| < \varepsilon\sqrt{x_0}$. Si on pose $\eta = \varepsilon\sqrt{x_0}$. alors $|t - x_0| < \eta$ implique que $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Autrement dit $\lim_{t\to x_0} f(t) = f(x_0)$, ainsi f est continue en x_0. D'où f est continue sur $[0, +\infty[$.

2. Fonction valeur absolue : La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = |t|$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, soit $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. D'aprés l'inégalité triangulaire on a $|f(t) - f(x_0)| = \big||t| - |x_0|\big| \leq |t - x_0|$. On $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ dés que $|t - x_0| < \varepsilon$. Il suffit donc de prendre $\eta = \varepsilon$. D'où $\lim_{t\to x_0} |t| = |x_0|$, ainsi f est continue en x_0.

3. Fonction sinus : Montrons que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = \sin(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On doit donc montrer que f est continue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. Tout dabord nous rappelons que $|\sin(x)| \leq 1$, $|\sin(x)| \leq |x|$ et $|\cos(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a aussi la relation suivante

$$\sin(t) - \sin(x_0) = 2\sin\left(\frac{t - x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{t + x_0}{2}\right).$$

On a

$$\left|\sin\left(\frac{t - x_0}{2}\right)\right| \leq \left|\frac{t - x_0}{2}\right| \quad \text{et} \quad \left|\cos\left(\frac{t + x_0}{2}\right)\right| \leq 1.$$

Donc

$$|\sin(t) - \sin(x_0)| \leq 2\left|\frac{t - x_0}{2}\right| = |t - x_0|.$$

Qui peut aussi s'écrire

$$-2|t - x_0| \leq \sin(t) - \sin(x_0) \leq 2|t - x_0|.$$

Puisque $\lim_{t\to x_0} |t - x_0| = 0$ alors d'aprés le principe des gendarmes on a $\lim_{t\to x_0} \big(\sin(t) - \sin(x_0)\big) = 0$, d'où $\lim_{t\to x_0} \sin(t) = \sin(x_0)$. Ce qui fallait démontrer.

4. Fonction cosinus : Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \ f(t) = \cos(t)$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Pour la démonstation il suffit d'utilier le même calcul que pour la fonction sinus en remarquons que pour tout $t, x_0 \in \mathbb{R}$ on a
$$\cos(t) - \cos(x_0) = -2\sin\left(\frac{t - x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{t + x_0}{2}\right).$$

2.2. Suites et continuité

Théorème 2.7. *Une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_n$ de points de D_f qui converge vers a on a la suite $(f(u_n))_n$ converge vers $f(a)$.*

Démonstration. • Supposons que f est continue en a. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in D_f$ on a
$$|t - a| < \eta \implies |f(t) - f(a)| < \varepsilon.$$
Soit $(u_n)_n \subset D_f$ qui converge vers a. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\begin{aligned} n \geq N &\implies |u_n - a| < \eta \\ &\implies |f(u_n) - f(a)| < \varepsilon. \end{aligned}$$
Ceci montre que la suite $(f(u_n))_n$ converge vers $f(a)$.
• Inversement, supposons que toute suite $(u_n)_n \subset D_f$ qui converge vers a son image $(f(u_n))_n$ converge vers $f(a)$. Montrons que f est continue en a. Par l'absurde on suppose que f n'est pas continue en a. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ il existe $t \in D_f$ te que $|t - a| < \eta$ et $|f(t) - f(a)| \geq \varepsilon$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si on pose $\eta = \frac{1}{n}$ alors il existe $t_n \in D_f$ tel que $|t_n - a| < \frac{1}{n}$ et $|f(t) - f(a)| \geq \varepsilon$. Ceci montre que la suite $(t_n)_n$ converge vers a, mais son image $f(t_n)$ ne converge pas vers $f(a)$. C'est absurde. □

Exemple 2.8. **(1)-** La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \ f(t) = \dfrac{1}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, soit $a \in: \mathbb{R}^*$ et soit $(u_n)_n$ une suite dans $\mathbb{R}^*$ qui converge vers a. Donc d'aprés le chapitre 1 sur les suite on a $f(u_n) = \frac{1}{u_n}$ converge vers $\frac{1}{a} = f(a)$ qand n tend vers $+\infty$. Donc d'aprés le théorème en haut f est continue en a.
(2)- Soient $p \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(t) = t^p$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_n$ une suite dans $\mathbb{R}$ qui converge vers a. La suite $f(u_n) = u_n^p = \underbrace{u_n \cdot u_n \cdots u_n}_{p \text{ fois}}$ converge vers $\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{p \text{ fois}} = a^p = f(a)$. Donc f est continue en a.

2.3. Opérations sur les fonctions continues

Proposition 2.9. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $a \in D$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg sont continues en a. Si de plus g est non nulle sur D alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a.*

Démonstration. Puisque f et g sont continue en a, alors pour toute suite $(u_n)_n$ dans D qui converge vers a on a $(f(u_n))_n$ converge vers $f(a)$ et $(g(u_n))_n$ converge vers $g(a)$. On a aussi $(\lambda f + \mu g)(u_n) = \lambda f(u_n) + \mu g(u_n) \to \lambda f(a) + \mu g(a) = (\lambda f + \mu g)(a)$ quand $n \to +\infty$. Donc $\lambda f + \mu g$ est continue en a.

D'autre part $(fg)(u_n) = f(u_n)g(u_n) \to f(a)g(a) = (fg)(a)$ quand $n \to +\infty$. Donc fg est continue en a. Finallement, $\left(\frac{f}{g}\right)(u_n) = \frac{f(u_n)}{g(u_n)} \to \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a)$ quand $n \to +\infty$. Donc $\frac{f}{g}$ est continue en a. □

Proposition 2.10. *Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(D_f) \subset D_g$. Si f est continue en $a \in D_f$ et g continue en $f(a) \in D_g$ alors la fonction composé $g \circ f$ est continue en a.*

Démonstration. Soit $(u_n)_n \subset D_f$ une suite qui converge vers a. Puisque f est continue en a, alors la suite $(f(u_n))_n$ converge vers $f(a)$. Or $f(u_n) \in D_g$ pour tout n (car $u_n \in D_f$ et $f(D_f) \subset D_g$) et puisque g est continue en $f(a)$ alors $(g(f(u_n)))_n$ converge vers $g(f(a))$. D'ou $(g \circ f)(u_n)$ tend vers $(g \circ f)(a)$ quand $n \to +\infty$. Donc $g \circ f$ est continue en a. □

Exemple 2.11. **(1)-** On a déjà vue que la fonction $t \mapsto t^p$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Donc les fonctions de la forme $f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ (avec les coefficients $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$) sont continues sur $\mathbb{R}$ car c'est la somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
D'autre part, si $P(t)$ et $Q(t)$ sont deux fonctions polynomes alors la fonction $f : \mathbb{R}\backslash\{x \in \mathbb{R} \mid Q(t) = 0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ est continue.
(2) La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t\sin(\frac{1}{t})$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ car c'est le produit est le composé de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

2.4. Prolongement par continuité

Soit $f : D\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D sauf en x_0. On suppose que f est continue sur $D\backslash\{x_0\}$ est que $\lim\limits_{t \to x_0} f(t) = \ell$ existe ($\ell \in \mathbb{R}$). Alors la fonction

$$\tilde{f} : D \to \mathbb{R}, \qquad f(t) = \begin{cases} f(t), & t \neq x_0, \\ \ell, & t = x_0, \end{cases}$$

est continue sur D. On appel $\tilde{f}$ le *prolongement continu* de f sur D.

Exemple 2.12. **(1)-** Cherchons si la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $f(t) = t\sin(\frac{1}{t})$ admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$. Donc il faut vérifier deux choses : la continuité de f est l'existence de la limite de f en 0. En effet, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car c'est le produit est le composé de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. D'autre par si $t \neq 0$ alors $|f(t)| \leq |t|$ et d'aprés le principe des gendarmes on a $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0$. Donc f admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$ défini par

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(t) = \begin{cases} t\sin(\frac{1}{t}), & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

(2)- Montrons que la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ admet un prolongement continue sur $\mathbb{R}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car c est le produit des fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto \sin(t)$ qui sont continues sur $\mathbb{R}^*$. Il reste a calculer la limite de f en 0 (donc en doit calculer limites à gauche et à droite de 0). On

sait que (si non nous allons la démontrer plus tard dans la partie fonctions dérivable) que $\sin(t) \leq t$ pour tout $t \geq 0$, et donc $\frac{\sin(t)}{t} \leq 1$ pour tout $t \geq 0$. D'autre part on sait que

$$t \leq \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}, \qquad \forall\, t \in [0, \frac{\pi}{2}[.$$

Ce qui implique que

$$\cos(t) \leq \frac{\sin(t)}{t}, \qquad \forall\, t \in [0, \frac{\pi}{2}[.$$

Donc on a

$$\cos(t) \leq \frac{\sin(t)}{t} \leq 1, \qquad \forall\, t \in [0, \frac{\pi}{2}[.$$

Puisque $\cos_{t \to 0}(t) = 1$ alors par le principe des gendarmes on a

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1.$$

Regardons la limite a gauche en 0. Soit $t \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$, donc $-t \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Par suit

$$\sin(-t) \leq -t \leq \tan(-t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}, \qquad \forall\, t \in]-\frac{\pi}{2}, 0].$$

Mais $\cos(-t) = \cos(t)$ et $\sin(-t) = -\sin(t)$, donc

$$1 \leq \frac{\sin(t)}{t} \leq \cos(t), \qquad \forall\, t \in]-\frac{\pi}{2}, 0].$$

alors par le principe des gendarmes on a

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{\sin(t)}{t} = 1.$$

Conculsion

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1.$$

Ainsi f admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

2.5. Propriétés des fonctions continues

Les énoncés de ce paragraphe sont assez parlants mais les démonstrations sont relativement délicates, on pourra d'abord se concentrer sur l'application des résultats.

Théorème 2.13. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si λ est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.*

Application 2.14. Un polynôme P à coefficients réels de degré impair possède une racine réelle. En effet si a_n est le coefficient du terme de plus haut degré n :

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = signe(a_n)\,\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = (-1)^n\, signe(a_n)\,\infty.$$

Donc il existe a avec $P(a) < 0$ et il existe b avec $P(b) > 0$ donc il existe c avec $P(c) = 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 2.15. (*Borel–Heine*) *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continu. Alors :*

1. f *est bornée. Autrement dit, il existe* $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ *tels que* $\gamma \le f(t) \le \delta$ *pour tout* $t \in [a, b]$ (*qui est équivalent à l'existence de* $K > 0$ *tel que* $|f(t)| \le K$ *pour tout* $t \in [a, b]$).
2. f *atteint son minimum et son maximum, c'est-à-dire que : il existe* $c, d \in [a, b]$ *tels que*

$$f(c) \le f(t) \le f(d), \qquad \forall\, t \in [a, b].$$

Exemple 2.16. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t}, & t > 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Montrons que f est bornée sur $[0, +\infty[$. On a déjà vue que f est continue sur $[0, +\infty[$. D'autre part, on a $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \le \frac{1}{t}$ pourv tout $t > 0$. D'après le principe des gendarmes on a $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Donc pour $\varepsilon = 1$ il existe $A > 0$ tel que $|f(t)| \le 1$ pour tout $t > A$. Donc f est bornée sur $]A, +\infty[$. Montenant il rest la bornetude sur $[0, A]$. Puisque f est continue sur $[0, +\infty[$, en particulier elle est continue sur l'intervalle $[0, A]$. Ainsi d'près le théorème de Borel-Heine f est bornée sur $[0, A]$, et donc il existe $K > 0$ tel que $|f(t)| \le K$ pourv tout $t \in [0, A]$. Si on pose $M = \max\{1, K\}$ on trouve alors $|f(t)| \le M$ pour tout $t \in [0, +\infty[$. Donc f est bornée sur $[0, +\infty[$.

Théorème 2.17. *Soit* I *un intervalle d'extrémités* a *et* b (*c'est-à-dire* $I = [a, b]$ *ou* $I =]a, b[$) *et soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue strictement croissante telle que*

$$\lim_{t\to a^+} f(t) = \alpha \quad et \quad \lim_{t\to b^+} f(t) = \beta.$$

Si J *est un intervalle d'extrémités* α *et* β *alots* $f : I \to J$ *est une bijection. De plus* $f^{-1} : J \to I$ *est continue croissante sur* J.
On obtient donc des bijiction de $[a, b]$ *vers* $[\alpha, \beta]$ *ou de* $]a, b[$ *vers* $]\alpha, \beta[$.

Démonstration. Comme $x < y$ entraîne $f(x) < f(y)$, la fonction f est injective.
• Montrons que f est aussi surjective. Soit alors $y \in]\alpha, \beta[$ et soient $s, r \in \mathbb{R}$ tel que $a < s < r < b$. On a f est continue sur l'intervalle $[s, r]$ donc d'après le théorème de Borel-Heine il existe $x_1, x_2 \in]a, b[$ tels que $f(x_1) \le f(t) \le f(x_2)$ pour tout $t \in [s, r]$ et puisque s, r sont arbitraire dans $]a, b[$ alors on a

$f(x_1) \leq f(t) \leq f(x_2)$ pour tout $t \in]a, b[$. D'autre part, $f(x_1) \leq f(t)$ pour tout $t \in]a, b[$ implique que $f(x_2) \leq \lim_{t \to a^+} f(t) = \alpha < y$, d'où $f(x_2) < y$. De même $f(t) \leq f(x_2)$ pour tout $t \in]a, b[$ implique $\beta = \lim_{t \to a^+} f(t) \leq f(x_2)$. Or $y < \beta$, donc $y < f(x_2)$. On a montrer que $f(x_1) < y < f(x_2)$ et donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f(c) = y$. Ainsi f est surjective et définit une bijection de $]a, b[$ sur $]\alpha, \beta[$.
• Voyons que f^{-1} est croissante et continue. Si $x < y$ et $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(y)$ et puisque f croissante, on aurait alors $x = f(f^{-1}(x)) \geq f(f^{-1}(y)) = y$ ce qui est contradictoire. □

Exemple 2.18. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, \;\; f(t) = t + t\log(t)$. Montrons que f réalise une bijection continue :
• La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ car c'est le produit et la somme de fonctions continue sur $[1, +\infty[$.
• f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. En effet, la fonction $t \mapsto \log(t)$ est strictement continue sur $[1, +\infty[$. Donc pour $1 \leq t < s$ on a $\log(t) < \log(s)$, est donc $1 + \log(t) < 1 + \log(s)$. Ce qui implique $t(1 + \log(t)) < t(1 + \log(s)) < s(1 + \log(s))$. Ainsi $f(t) < f(s)$.
• On aussi

$$\lim_{t \to 1+} f(t) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty.$$

Donc $f : [1, +\infty[\to [1, +\infty[$ est une bijection et f^{-1} est continue.